The Reconstruction Problem

Vertiefungsseminar Graphentheorie

- Definition und einfache Resultate
- Rekonstruktion und Zusammenhang
- Rekonstruktion und Valenzen
- Kanten-Rekonstruktion

Definition Sei ein Graph G mit Eckenmenge $V = V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gegeben. Mit $G - v_i$ sei der Untergraph bezeichnet, der durch das Löschen der Ecke v_i und aller inzidenten Kanten entsteht (also $G - v_i = G[V \setminus \{v_i\}]$). Die Graphen $G - v_i$ heißen *vertex-deleted subgraph* von G.

Definition Seien G, H zwei Graphen mit $|G| = |H|$. Eine Bijektion $\sigma : V(G) \to V(H)$ mit $G - v \cong H - \sigma(v)\ \forall v \in V(G)$ heißt *Hypomorphismus (hypomorphism)*. Existiert eine solche Abbildung, so heißen G, H *hypomorph (hypomorphic)*, in Zeichen: $G \asymp H$.

Definition Ein Graph G heißt *rekonstruierbar (reconstructible)*, wenn für jeden Graphen H gilt: $G \asymp H \Rightarrow G \cong H$. D.h.: G ist rekonstruierbar gdw. man G (bis auf Isomorphie) aus den (bis auf Isomorphie bekannten) $G - v_i$ zusammenbauen kann.

Untersucht werden soll die Richtigkeit folgender Vermutung:

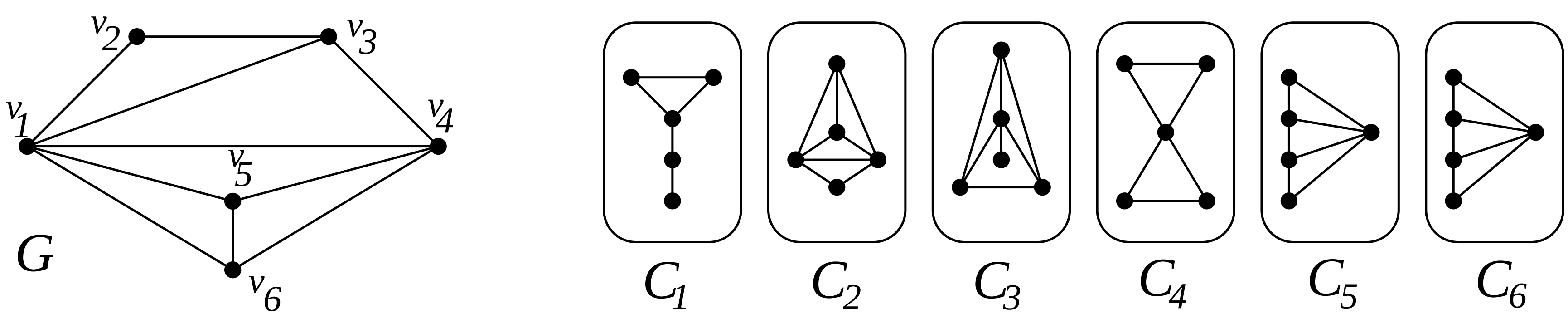
Reconstruction Conjecture Jeder Graph mit mindestens drei Ecken ist rekonstruierbar.

Die Einschränkung auf mindestens drei Ecken ist notwendig, weil sich sonst ein einfaches Gegenbeispiel finden läßt: seien G, H gegeben durch $V(G) = V(H) = \{v_1, v_2\}$, $E(G) = \{(v_1, v_2)\}$, $E(H) = \emptyset$. Dann gilt $G \asymp H$, aber $G \ncong H$. Es werden daher in Zukunft nur Graphen mit mindestens drei Ecken betrachtet (und *gewöhnlich (ordinary)* genannt).

Bemerkung Ist ein Graph G rekonstruierbar, dann sein Komplement $\overline{G}$ ebenfalls. Beweisskizze: $\overline{G} \asymp \overline{H} \Rightarrow \overline{G} - v \cong \overline{H} - \sigma(v)\ \forall v \Rightarrow G - v \cong H - \sigma(v)\ \forall v \Rightarrow G \cong H \Rightarrow \overline{G} \cong \overline{H}$.

Eine informelle, aber sehr nützliche Formulierung der Rekonstruktions-Vermutung ist die folgende:

Zu einem Graphen G mit $|G| = n$ sei ein Kartenspiel (deck) C gegeben, bestehend aus den n Karten C_i. Auf der Karte C_i ist ein Graph gezeichnet, die isomorph zu $G - v_i$ ist. Also induzieren hypomorphe Graphen das gleiche Kartenspiel.



Reconstruction Conjecture Kann der Graph G alleine aus dem Kartenstapel C (bis auf Isomorphie) rekonstruiert werden?

Satz 1 Sind zwei Graphen G, H hypomorph, dann gilt $|G| = |H|$.

Beweis: Es existiert ein Hypomorphismus $G \to H$. Da Hypomorphismen spezielle Bijektionen sind, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2 Sind zwei Graphen G, H gewöhnlich und hypomorph, dann gilt $\|G\| = \|H\|$.

Beweis: Sei σ ein Hypomorphismus $G \to H$. Jede Kante $e \in E(G)$ gehört zu $|G|-2$ vertex-deleted subgraphs von G, entsprechendes gilt für H. Es folgt:

$$\|G\| \cdot (|G| - 2) = \sum_{v \in V(G)} \|G - v\| = \sum_{v \in V(G)} \|H - \sigma(v)\| =$$

$$\sum_{w \in V(H)} \|H - w\| = \|H\| \cdot (|H| - 2).$$

Wegen $|G| = |H| \neq 2$ folgt $\|G\| = \|H\|$. $\square$

Satz 3 Sind zwei Graphen hypomorph, dann sind beide zusammenhängend, oder beide nicht-zusammenhängend.

Beweis: Ein zusammenhängender Graph G hat wenigstens zwei nicht-trennende Ecken v_i, v_j (z.B. zwei Blätter eines Spannbaums), und hat daher wenigstens zwei zusammenhängende vertex-deleted subgraphs $G - v_i, G - v_j$. Andererseits hat ein nicht-zusammenhängender Graph G maximal einen zusammenhängenden vertex-deleted subgraph, denn ein solcher wäre eine Komponente von G mit $|G| - 1$ Ecken.

Da hypomorphe Graphen G, H dieselbe Anzahl zusammenhängender vertex-deleted subgraphs haben, sind entweder G und H zusammenhängend (wenn diese Anzahl wenigstens zwei ist), oder beide nicht. $\square$

Definition Für zwei Graphen G, Q bezeichne $s_Q(G)$ die Anzahl der Teilgraphen von G, die isomorph zu Q sind.

Satz 4 (Kelly) Für zwei hypomorphe Graphen G, H und einen weiteren Graphen Q mit $|Q| < |G|$ folgt: $s_Q(G) = s_Q(H)$.

Beweis: Sei σ ein Hypomorphismus $G \to H$. Jeder Teilgraph G' von G mit $G' \cong Q$ ist in $|G| - |Q|$ vertex-deleted subgraphs von G enthalten. Entsprechendes gilt für H. Es folgt:

$$s_Q(G) \cdot (|G| - |Q|) = \sum_{v \in V(G)} s_Q(G - v) = \sum_{v \in V(G)} s_Q(H - \sigma(v)) =$$

$$\sum_{w \in V(H)} s_Q(H - w) = s_Q(H) \cdot (|H| - |Q|).$$

Wegen $|G| = |H| > |Q|$ folgt $s_Q(G) = s_Q(H)$. $\square$

Definition Für zwei Graphen G, Z bezeichne $c_Z(G)$ die Anzahl der Komponenten von G, die isomorph zu Z sind.

Satz 5 Jeder nicht-zusammenhängende gewöhnliche Graph G ist rekonstruierbar.

Beweis: Sei H ein Graph mit $G \asymp H$. Dann ist $G \cong H$ zu zeigen. Bezeichne $\mathcal{Z}$ die Menge aller Graphen Z mit $c_Z(G) \neq c_Z(H)$. Angenommen $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Wähle $X \in \mathcal{Z}$ mit $\|X\|$ maximal. Für alle Graphen X_0, die X als echten Teilgraphen haben, gilt wegen der Maximalität von X also $c_{X_0}(G) = c_{X_0}(H)$. Aus Satz 4 ($|X| < |G|$!) folgt $s_X(G) = s_X(H)$ und mit $c_X(G) \neq c_X(H)$ ergibt sich ein Widerspruch! Also $\mathcal{Z} = \emptyset$ und für alle Graphen Z gilt $c_Z(G) = c_Z(H) \Rightarrow G \cong H$. $\square$

Satz 6 Für zwei hypomorphe gewöhnliche Graphen G, H und einen weiteren Graphen Q mit $|Q| = |G|$ gilt $s_Q(G) = s_Q(H)$, wenn

- Q nicht-zusammenhängend ist.
- Q ein Kreis ist.
- Q ein Weg ist.

Beweis: wird hier nicht geführt. $\square$

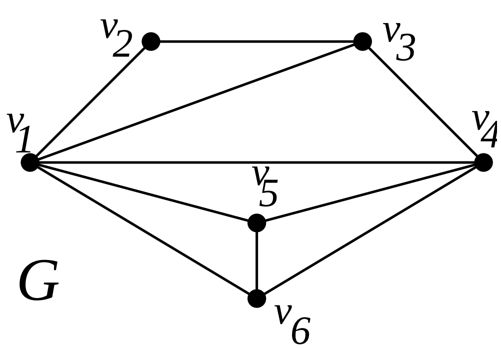
Bemerkung Satz 5 ist ein Spezialfall von 6.1: es gilt nämlich $s_G(H) = s_G(G) = 1 \Rightarrow H \cong G$.

Bemerkung 6.1 und 6.2 implizieren, daß hypomorphe Graphen die gleiche Anzahl an Hamiltonkreisen bzw. -wegen haben.

Definition Die *Valenzfolge (valency-sequence)* vs(G) eines Graphen G ist die Folge der Valenzen $\rho_G(v_i)$ seiner Knoten $v_i \in V(G)$ in nicht-absteigender Reihenfolge.

Definition Die *Valenzfolge* vs$_G(v)$ eines Knotens v des Graphen G ist die Folge der Valenzen seiner Nachbarn in nicht-absteigender Reihenfolge.

Definition *Valenzfolgen-Folge (valency-sequence sequence)* vss(G) des Graphen G ist die Folge der Valenzfolgen vs$_G(v_i)$ seiner Knoten $v_i \in V(G)$ in lexikographischer Reihenfolge.



$$\text{vs}(G) = (2,3,3,3,4,5)$$

$$\text{vs}_G(v_3) = (2,4,5) \qquad \text{vs}_G(v_4) = (3,3,3,5)$$

$$\text{vss}(G) = (\text{vs}(v_1), \text{vs}(v_3), \text{vs}(v_4), \ldots, \text{vs}(v_2)) =$$
$$((2,3,3,4),(2,4,5),(3,3,3,5),\ldots,(3,5))$$

Satz 7 Seien G, H zwei gewöhnliche Graphen und $\sigma : G \to H$ ein Hypomorphismus. Dann gilt $\rho_G(v) = \rho_H(\sigma(v))\ \forall v \in V(G)$. Für hypomorphe Graphen gilt also: $\mathsf{vs}(G) = \mathsf{vs}(H)$.

Beweis: $\rho_G(v) = \|G\| - \|G - v\| = \|H\| - \|H - \sigma(v)\| = \rho_H(\sigma(v))$.$\square$

Satz 8 Seien G, H zwei gewöhnliche Graphen und $\sigma : G \to H$ ein Hypomorphismus. Dann gilt $\mathsf{vs}_G(v) = \mathsf{vs}_H(\sigma(v))\ \forall v \in V(G)$. Für hypomorphe Graphen gilt also: $\mathsf{vss}(G) = \mathsf{vss}(H)$.

Beweis: Zu einer nicht-absteigenden Folge w bezeichne $w|_x$ die (eindeutig bestimmte) Folge, die entsteht, wenn aus w ein Element w_0 mit $w_0 = x$ entfernt wird. Sei u eine weitere Folge mit $|u| = |w|$. Dann sei $w \ / \ u := (w_i)_{1 \le i \le |w|,\, w_i \ne u_i}$ definiert.

Mit dieser Nomenklatur gilt: $\mathsf{vs}_G(v) = \mathsf{vs}(G)|_{\rho_G(v)} \ / \ \mathsf{vs}(G - v) = \mathsf{vs}(H)|_{\rho_H(\sigma(v))} \ / \ \mathsf{vs}(H - \sigma(v)) = \mathsf{vs}_H(\sigma(v))$. $\square$

Definition Sei G ein Graph und $v \in V(G)$ ein Knoten. Dann heißt v *gut (good)*, falls $\rho_G(v) - 1 \notin \mathsf{vs}(G)$. Ansonsten heißt v *schlecht (bad)*. Die Menge der schlechten Knoten wird mit B_G bezeichnet. Der Knoten v heißt k*-gut*, wenn alle $w \in V(G)$, zu denen ein $v-w-$Pfad der Länge k existiert, gut sind.

Satz 9 Ein gewöhnlicher Graph G ist rekonstruierbar, wenn es einen 1-guten Knoten $v \in V(G)$ gibt.

Beweis: Sei H ein Graph hypomorph zu G und σ ein Hypomorphismus $G \to H$. Dann ist $G \cong H$ zu zeigen.

Betrachte einen Graphen G' mit $G - v \cong G'$ und einen Isomorphismus $\tau : G - v \to G'$. Sei $r := \rho_G(v)$. Für die r Knoten $w_i \in \mathsf{N}_G(v)$ gilt $\rho_{G'}(\tau(w_i)) = \rho_{G-v}(w_i) = \rho_G(w_i) - 1$, während $\rho_{G'}(u_j) = \rho_{G-v}(\tau^{-1}(u_j)) = \rho_G(\tau^{-1}(u_j))$ für die übrigen Knoten $u_j \in V(G')$ gilt.

Suche nun alle Ecken $x_i \in G'$ mit $\rho_{G'}(x_i) \notin \mathsf{vs}(G)|_r$. Da alle Nachbarn von v gut sind, findet man genau die r Ecken $\tau(w_i)$. Erweitere G' zum Graphen G'' durch hinzufügen einer neuen Ecke g und der r Kanten (x_i, g).

Es gilt $G \cong G''$, denn offenbar ist ein Isomorphismus $G \to G''$ gegeben durch:

$$\varphi_G : G \to G''; \; z \mapsto \begin{cases} g & \text{falls } z = v \\ \tau(z) & \text{falls } z \neq v \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise lassen sich zu H die Graphen H', H'' konstruieren mit $H'' \cong H$. Dann gilt $G' \cong G - v \cong H - \sigma(v) \cong H'$. Wegen der Sätze 6 und 7 stimmen die benutzten Valenzen überein. Da natürlich alle Nachbarn von $\sigma(v)$ gut in H sind, folgt daraus $G'' \cong H''$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Korollar Jeder gewöhnliche Graph G mit $|\rho_G(v) - \rho_G(w)| \neq 1 \;\forall v, w \in V(G)$ ist rekonstruierbar.

Beweis: Natürlich ist jeder Knoten von G gut, und die Behauptung folgt aus Satz 9. $\square$

Beispiel Sei G ein Graph mit vs(G) $= (2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7)$. Dann ist G rekonstruierbar.

Korollar Gilt in einem gewöhnlichen Graphen G die Ungleichung $\sum_{v \in B_G} \rho_G(v) < |G|$, dann ist G rekonstruierbar.

Beweis: Die Vereinigung der Nachbarschaften der Knoten $v \in B_G$ deckt offenbar nicht ganz $V(G)$ ab, also existiert ein $w \in V(G)$, das mit keinem $v \in B_G$ adjazent ist. Die Behauptung folgt mit Satz 9. $\square$

Beispiel Ein Graph G ist rekonstruierbar, wenn gilt: vs(G) $= (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7)$.

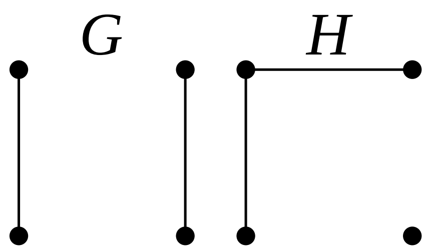
Definition Sei ein Graph G mit Kantenmenge $E = E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ gegeben. Mit $G - e_i$ sei der Untergraph bezeichnet, der durch das Löschen der Kante e_i entsteht. Die Graphen $G - e_i$ heißen *edge-deleted subgraph* von G.

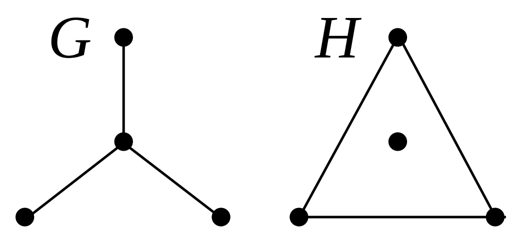
Definition Seien G, H zwei Graphen. Eine Bijektion $\sigma : E(G) \to E(H)$ mit $G - e \cong H - \sigma(e)\ \forall e \in E(G)$ heißt *Kanten-Hypomorphismus (edge-hypomorphism)*. Existiert eine solche Abbildung, so heißen G, H *kanten-hypomorph (edge-hypomorphic)*, in Zeichen: $G \overset{\text{e}}{\asymp} H$. (Natürlich gilt $G \overset{\text{e}}{\asymp} H \Rightarrow |G| = |H| \wedge \|G\| = \|H\|$).

Definition Ein Graph G heißt *kanten-rekonstruierbar (edge-reconstructible)*, wenn für jeden Graphen H gilt: $G \overset{\text{e}}{\asymp} H \Rightarrow G \cong H$. D.h. G ist kanten-rekonstruierbar gdw. man G (bis auf Isomorphie) aus den (bis auf Isomorphie bekannten) $G - e_i$ zusammenbauen kann.

Edge-reconstruction Conjecture Jeder Graph mit mindestens vier Kanten ist kanten-rekonstruierbar.

Die Einschränkung auf mindestens vier Kanten ist notwendig, weil sich sonst einfache Gegenbeispiele finden lassen. Graphen mit wenigstens vier Kanten heißen *kanten-gewöhnlich*.





Satz 11 Ein kanten-gewöhnlicher Graph G ist kanten-rekonstruierbar gdw. sein Kantengraph $L(G)$ rekonstruierbar ist.

Beweis: Beispielsweise in [1] nachzulesen. $\square$

Satz 12 Seien G, H zwei kanten-gewöhnliche Graphen. Für jeden Graphen Q mit $\|Q\| < \|G\|$ gilt: $G \overset{\text{e}}{\asymp} H \Rightarrow s_Q(G) = s_Q(H)$.

Beweis: Es gilt $s_Q(G) \cdot (\|G\| - \|Q\|) = \sum_{e \in E(G)} s_Q(G - e) = \sum_{e' \in E(H)} s_Q(H - e') = s_Q(H) \cdot (\|H\| - \|Q\|)$. Mit $\|G\| = \|H\| > \|Q\|$ folgt die Behauptung. $\square$

Definition Zu einem Graphen G und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $D_n(G)$ die Menge der n-valenten Knoten: $D_n(G) := \{v \in V(G) \mid \rho_G(v) = n\}$.

Satz 13 Für zwei kanten-gewöhnliche kanten-hypomorphe Graphen G, H gilt: $\mathrm{vs}(G) = \mathrm{vs}(H)$.

Beweis: Sei S^n für $n \in \mathbb{N}$ der Graph mit $V(S) = \{v_0, \ldots, v_n\}$ und $E(S) = \{(v_0, v_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Wegen $|D_k(G)| = s_{S^k}(G) - \sum_{i>k} \binom{i}{k} |D_i(G)| = s_{S^k}(H) - \sum_{i>k} \binom{i}{k} |D_i(H)| = |D_k(H)|$ folgt $|D_k(G)| = |D_k(H)| \; \forall k \in \mathbb{N}$ und die Behauptung folgt. $\square$

Satz 14 Jeder rekonstruierbare kanten-gewöhnliche Graph G ohne isolierte Ecken ist kanten-rekonstruierbar.

Beweis: Für einen Graphen K sei eine Äquivalenzrelation $R \subseteq V(K) \times V(K)$ gegeben durch $vRw :\Leftrightarrow K - v \cong K - w$. Die Äquivalenzklasse, die das Element v enthält, sei mit $R_v(K)$ bezeichnet.

Sei H ein Graph mit $G \overset{\text{e}}{\asymp} H$. Dann ist $G \cong H$ zu zeigen. Wenn zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Bijektion $\tau_k : D_k(G) \to D_k(H)$ mit $\forall v \in D_k(G) : G - v \cong H - \tau_k(v)$ existiert, so ist

$$\tau : V(G) \to V(H);\ v \mapsto \tau_{\rho_G(v)}(v)$$

ein Hypomorphismus $G \to H$. Nach Vorraussetzung ist G rekonstruierbar, also folgt $G \cong H$.

Wir zeigen nun die Existenz der Bijektionen $\tau_k : D_k(G) \to D_k(H)$ durch Induktion nach den auftretenden Valenzen $k \in \text{vs}(G)$:

Sei $k_0 = \min\{\rho_G(v) \mid v \in V(G)\}$. Wegen Satz 12 existiert zu jedem $v \in D_{k_0}(G)$ ein $w \in D_{k_0}(H)$ mit $G-v \cong H-w$ und $|R_v(G)| = |R_w(H)|$. Also existiert eine Bijektion $\tau_{k_0} : D_{k_0}(G) \to D_{k_0}(H)$ mit $G - v \cong H - \tau_{k_0}(v)$.

Sei nun $k > k_0$ und die Existenz von τ_i für alle $i < k$ gezeigt. Betrachte $v \in D_k(G)$ und $K := G - v$. Es gilt $s_K(G) = s_K(H)$. Die zu K isomorphen Teilgraphen aus G bzw. H können auf zwei mögliche Arten entstehen: durch das Entfernen eines Knotens mit Valenz $< k$ und entsprechend vieler weiterer Kanten (von dieser Sorte gibt es aber in G und H gleich viele!), oder durch das Löschen einer k-valenten Ecke. Also existiert ein $w \in D_k(H)$ mit $G - v \cong H - w$ und $|R_v(G)| = |R_w(H)|$. Insbesondere existiert eine Bijektion $\tau_k : D_k(G) \to D_k(H)$ mit $G - v \cong H - \tau_k(v)$. $\square$

Korollar (aus Satz 11,14) Ist ein zusammenhängender Graph G rekonstruierbar, so sind alle $L^n(G)$ (kanten-)rekonstruierbar.

Inklusions-Exklusions-Prinzip (Siebformel) Sei A eine Menge und $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^p$ eine p-elementige Familie von Untermengen $A_i \subseteq A$. Dann gilt:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p| = \sum_{1 \le i \le p} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le p} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^{p+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p| =$$

$$\textstyle\sum_{S \subseteq \{1,\ldots,p\}, S \neq \emptyset} (-1)^{|S|+1} |\bigcap_{i \in S} A_i|.$$

Beweisskizze: Betrachte den „Nettobeitrag“ jedes Elements $a \in A$ zu $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p|$. Hinweis: $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = 1$.$\square$

Korollar $|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_p)| = |A| - |A_1 \cup \ldots \cup A_p| = |\bigcap_{i \in \emptyset} A_i| - \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,p\}, S \neq \emptyset} (-1)^{|S|+1} |\bigcap_{i \in S} A_i| = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,p\}} (-1)^{|S|} |\bigcap_{i \in S} A_i|$. $\square$

Definition Seien G, H Graphen und f eine Abbildung $V(G) \to V(H)$. Dann heißt f *Homomorphismus (homomorphism)*, wenn für alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ gilt: $(f(v_i), f(v_j)) \in E(H)$. Ist f injektiv, so heißt f *Monomorphismus (monomorphism)*. Die Anzahl der Monomorphismen $G \to H$ sei mit $\langle G, H \rangle$ bezeichnet.

f heißt *Monomorphismus mit Defekt* r, wenn f injektiv ist und genau r Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $(f(v_i), f(v_j)) \notin E(H)$ existieren. Die Anzahl der Monomorphismen $G \to H$ mit Defekt r wird mit $\langle G, H \rangle_r$ bezeichnet. (Natürlich gilt $\langle G, H \rangle = \langle G, H \rangle_0$.)

Bemerkung Alle im Folgenden betrachteten Monomorphismen $G \to H$ (evtl. mit Defekt r) sind sogar Bijektionen, d.h. $|G| = |H|$.

Satz 15 (Lovász) Seien G, H zwei Graphen. Ist $\|G\| > \|\overline{G}\|$ (also $\|G\| > \frac{1}{2}\binom{|G|}{2}$), dann gilt $G \overset{\mathsf{e}}{\asymp} H \Rightarrow G \cong H$.

Beweis: Seien A, B zwei Graphen mit $|A| = |B| = n$. Für $e \in E(A)$ bezeichne A_e die Menge der Bijektionen $f : V(A) \to V(B)$ mit $f(e) \notin E(B)$ (also $f(e) \in E(\overline{B})$). Für alle $X \subseteq A, |X| = |A|$, gilt $|\bigcap_{e \in E(X)} A_e| = \langle X, \overline{B} \rangle$, und es folgt mit der Siebformel:

$$\langle A, B \rangle = n! - |\bigcup_{e \in E(A)} A_e| = \sum_{X \subseteq A, |X| = |A|} (-1)^{\|X\|} \langle X, \overline{B} \rangle.$$

Angewandt auf G und H ergeben sich die Gleichungen

$$\langle G, H \rangle = \sum_{X \subseteq G} (-1)^{\|X\|} \langle X, \overline{H} \rangle \qquad \langle H, H \rangle = \sum_{X \subseteq H} (-1)^{\|X\|} \langle X, \overline{H} \rangle$$

Die Summen unterscheiden sich wegen $G \overset{\mathsf{e}}{\asymp} H$ nicht in den Gliedern $X \neq G$ bzw. $X \neq H$. Wegen $\|H\| = \|G\| > \|\overline{G}\| = \|\overline{H}\|$ gilt darüber hinaus $\langle G, \overline{H} \rangle = \langle H, \overline{H} \rangle = 0$, also $\langle G, H \rangle = \langle H, H \rangle$. Natürlich gilt $\langle H, H \rangle > 0$, was die Behauptung zeigt. $\square$

Satz 16 (Müller) Seien G, H zwei Graphen mit $|G| = |H| = n$ und $\|G\| = \|H\| = m$. Ist $m > n \log_2 n - n$, dann gilt $G \stackrel{\mathrm{e}}{\asymp} H \Rightarrow G \cong H$.

Beweis: Für $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ bezeichne A'_e die Menge der Bijektionen $f : V(G) \to V(H)$ mit $(f(v_i), f(v_j)) \in E(H)$. Für alle $X \subseteq G, |X| = |G|$, gilt $|\bigcap_{e \in E(X)} A'_e| = \langle X, H \rangle$, und es folgt:

$$\langle G, \overline{H} \rangle_r = \sum_{X \subseteq G, \|X\| = r} \langle X, H \rangle - \binom{r+1}{r} \sum_{X \subseteq G, \|X\| = r+1} \langle X, H \rangle + \ldots$$

$$= \sum_{X \subseteq G, |X| = |G|, \|X\| \geq r} (-1)^{\|X\| + r} \binom{\|X\|}{r} \langle X, H \rangle$$

Entsprechend: $\langle H, \overline{H} \rangle_r = \sum_{X \subseteq H, |X| = |H|, \|X\| \geq r} (-1)^{\|X\| + r} \binom{\|X\|}{r} \langle X, H \rangle$

Wieder unterscheiden sich die Glieder der beiden Summen nicht für $X \neq G$ bzw. $X \neq H$. Angenommen $G \ncong H$, also $\langle G, H \rangle = 0$:

$$\langle H, \overline{H} \rangle_r - \langle G, \overline{H} \rangle_r = (-1)^{m+r} \binom{m}{r} \langle H, H \rangle \Rightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{m} |\langle H, \overline{H} \rangle_r - \langle G, \overline{H} \rangle_r| = \langle H, H \rangle \cdot \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} = \langle H, H \rangle \cdot 2^m.$$

Wir erhalten: $\quad 2^m \leq \langle H, H \rangle \cdot 2^m = \sum_{r=0}^{m} |\langle H, \overline{H} \rangle_r - \langle G, \overline{H} \rangle_r| \leq$

$$\sum_{r=0}^{m} |\langle H, \overline{H} \rangle_r + \langle G, \overline{H} \rangle_r| = \sum_{r=0}^{m} \langle H, \overline{H} \rangle_r + \sum_{r=0}^{m} \langle G, \overline{H} \rangle_r \leq$$

$$2 \cdot n! < 2 \cdot (\tfrac{n}{2})^n \Rightarrow 2^m < \frac{n^n}{2^{n-1}} \Rightarrow m < n \log_2 n - n + 1,$$

Widerspruch zur Vorraussetzung $m > n \log_2 n - n$, also $G \cong H$.□

Bemerkung Satz 16 sagt aus, daß (für große $|G|$) „nahezu alle“ Graphen G kanten-rekonstruierbar sind.

Bemerkung Ergänzend zu Satz 16 läßt sich zeigen, daß auch $m \geq n \log_2 \rho_{\text{max}} + n$ ein hinreichendes Kriterium für kanten-Rekonstuierbarkeit ist.

Literatur

[1] R. L. Hemminger, On reconstructing a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 185-187; MR38#1019

[2] D. L. Greenwell, Reconstructing graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **30** (1971), 431-433; MR44#3908

[3] L. Lovász, A note on the line reconstruction problem, *J. Combinatorial Theory* (B) **13** (1972), 309-310; MR46#8913

[4] V. Müller, The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than $n \log_2 n$ edges, *J. Combinatorial Theory* (B) **22** (1977), 281-283