0 Einleitung & Übersicht

Untersuchungen zur Mengenlehre gehen bereits auf Aristoteles zurück. Der in der Mengenlehre auf natürliche Weise auftretende Begriff der Unendlichkeit wurde damals argwöhnisch betrachtet: unendliche Mengen (etwa die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen) waren zwar bekannt, der Begriff „unendlich“ als absolute Größe jedoch als mystisch angesehen.

Die Eigenschaft der Menge $\mathbb{N}$, zu jedem Element n stets einen Nachfolger $n+1$ zu enthalten, wird als *potential unendlich* bezeichnet. Mit diesem Unendlichkeitsbegriff kamen Leibniz und Newton aus, als sie 1660, 1670 die Grundlagen der Infinitesimalrechnung, etwa die Differential- und Integralrechnung, schufen.

Erst Georg Cantor[1] führte „unendlich“ als absoluten Größe (*aktual unendlich*) ein („naive Mengenlehre“), und nahm ihr so die Mystizität. In den Jahren 1872-1900 entwickelte er die Theorie der transfiniten Zahlen (Kardinalzahlen, Ordinalzahlen). Für den Begriff „Menge“ gibt er folgende umgangssprachliche Definition:

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Daß eine rein umgangssprachliche Definition der Mengenlehre nicht ausreichen kann, machen einige sich ergebende Paradoxa deutlich:

- **Paradoxon von Bolzano** Eine Menge kann „gleichmächtig“ zu einer echten Teilmenge sein. Etwa ist die Menge $\mathbb{N}$ mittels einer Bijektion auf die Menge $2\mathbb{N}$ der geraden natürlichen Zahlen abbildbar.
- **Antinomie von Burali-Forti (1897)** Die „Menge aller Ordinalzahlen“ führt zu einem Widerspruch.
- **Antinomie der Allmenge (Cantor, 1899)** Die „Menge aller Mengen“ führt zu einem Widerspruch (würde so eine Menge M existieren, dann ist ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ in ihr enthalten, obwohl diese, wie wir später sehen werden, echt mächtiger ist).
- **Antinomie der Mengenlehre (Russel, 1902)** Unter der Annahme, daß Mengen durch die Eigenschaft der in ihnen enthaltenen Elemente definiert werden können („Komprehensionsprinzip“), existiert die Menge $M = \{A \text{ Menge} \mid A \notin A\}$ (Eigenschaft: „ist nicht Element von sich selbst“). Das führt jedoch sofort auf den Widerspruch $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$.

Die Paradoxa machen klar, daß auch die Mengenlehre eine präzise axiomatische Grundlage braucht, die sich wenigstens in sofern vom intuitiven Mengenbegriff unterscheidet, als daß die genannten Widersprüche dort nicht auftauchen.

Zu diesem Zweck führte Russel 1903 seine „Typentheorie der Mengen“ ein. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, daß eine Menge ein „höheres“ Objekt ist als die Elemente, die sie bilden. Die unterste Stufe der Hierarchie der mathematischen Objekte besteht aus Dingen wie Zahlen, denen wir intuitiv die Eigenschaft absprechen, eine Menge zu sein (*Urelemente*,

[1] 1845-1918

„Mengen nullter Stufe“). Die Mengen i-ter Stufe, $i \geq 1$, dürfen als Elemente nur Mengen mit Stufennummer kleiner i enthalten. Das Komprehensionsprinzip ist nur in Bezug auf eine explizit genannte Stufe i möglich und erzeugt eine Menge der Stufe $i + 1$.

Einen anderen Ansatz verfolgte Zermelo mit seinen ZFC-Axiomen der Mengenlehre (1908). Dieses Axiomensystem besteht aus acht Axiomen, das Komprehensionsprinzip beschränkt sich auf das Bilden von *Untermengen* bereits vorhandener Mengen. Die Russel'sche Antinomie ist dann gar nicht erst formulierbar.

Axiome der Mengenlehre (etwa ZFC) dürfen natürlich nicht in der Sprache der Mengenlehre (auch nicht der intuitiven) formuliert werden. Als geeignete Sprachen wurden Logikkalküle entwickelt: Aussagenlogik und Prädikatenlogik 1. bzw. 2. Stufe. Um etwa die Menge $\mathbb{N}$ zu definieren ist die Prädikatenlogik 2. Stufe nötig. Hervorzuheben ist die sich ergebende enge Verbindung zwischen Mengenlehre und mathematischer Logik.

Doch auch die Methoden der Logik stoßen an Grenzen. Im Jahr 1920 startete Hilbert sein Programm, die Grundlagen der Mathematik durch ein „lückenloses Gerüst von Axiomen“ aus einem Logikkalkül herzuleiten. Ein Axiomensystem, in dem alle wahren Aussagen auch aus diesem beweisbar sind, heißt *vollständig*. Die intuitive Annahme, daß alle Axiomensysteme stets vollständig sind, wurde von Kurt Gödel widerlegt: sein sog. „Vollständigkeitssatz“ besagt, daß die Prädikatenlogik 2. Stufe (im Gegensatz zur 1. Stufe) unvollständig ist. Mit anderen Worten: jedes Axiomensystem, daß die Definition der natürlichen Zahlen erlaubt, enthält nicht-beweisbare wahre Aussagen!

Zum Abschluß geben wir noch eine gern angeführte Illustration des Paradoxon von Bolzano: das *Hilbert'sche Hotel*. In einem Hotel gebe es zu jedem Element $n \in \mathbb{N}$ ein Zimmer mit dieser Nummer. Leider ist das Hotel vollständig belegt. Wie ist zu verfahren, wenn neue Gäste eintreffen?

- Falls ein weiterer Gast kommt, wird auf folgende Weise ein Zimmer frei gemacht: der Hotelier läßt jeden Gast ein Zimmer aufrücken (also vom Zimmer n in das Zimmer $n + 1$). Das Zimmer mit Nummer 1 ist dann frei und kann neu belegt werden.

- Falls ein vollbesetzter Reisebus mit $|\mathbb{N}|$ Sitzplätzen kommt, können auch diese Gäste untergebracht werden: der Hotelier läßt alle bereits eingezogenen Gäste vom jeweiligen Zimmer in jenes mit doppelter Zimmernummer umziehen. Die neuen Gäste werden auf die frei werdenden Zimmer (ungerader Nummer) verteilt.

Literatur

Fraenkel: *Mengenlehre und Logik*, 1957
Halmos: *Naive Set Theory*, 1972
Ebbinghaus: *Einführung in die Mengenlehre*
Ebbinghaus, Flum, Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*
Deiser: *Einführung in die Mengenlehre*

1 Kardinalzahlen

Definition Zwei gegebene Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.

Lemma 1.1 Die Relation *gleichmächtig* ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Reflexivität: wähle etwa $f = \mathrm{id}$. Symmetrie: mit f ist auch f^{-1} eine Bijektion. Transitivität: die Komposition von Bijektionen ist wieder bijektiv. $\square$

Definition Sei A eine Menge. Wir nennen die sie enthaltende Äquivalenzklasse gemäß obiger Relation *Kardinalzahl* von A und vereinbaren die Bezeichnung

$$\mathrm{card}(A) := |A| := \{B \text{ Menge} \mid A, B \text{ sind gleichmächtig}\}$$

Für zwei Mengen A und B gilt also: A und B gleichmächtig $\Leftrightarrow |A| = |B|$.

Bemerkung Das Benutzen der Mengenklammern in obiger Definition ist mit Vorsicht zu genießen, da vorerst nicht davon auszugehen ist, daß es sich bei den Äquivalenzklassen tatsächlich um Mengen handelt (vgl. Paradoxa aus der Einleitung). Wir stellen also noch einmal fest: $\mathrm{card}(A)$ bezeichnet die „Klasse" von Mengen, die gleichmächtig mit A ist.

Definition Für zwei Mengen schreiben wir $|A| \leq |B|$, wenn eine Injektion $f : A \to B$ existiert. Insbesondere gilt: $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$.

Lemma 1.4 Die Relation $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf Mengen.

Beweis: Reflexivität: wähle etwa $f = \mathrm{id}$. Transitivität: die Komposition von Injektionen ist injektiv. Antisymmetrie ($x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$): folgt aus dem unten angegebenen Satz von Cantor-Bernstein. $\square$

Lemma 1.2 Es seien A, B, C Mengen mit $|A| = |C|$ und $A \subseteq B \subseteq C$. Dann folgt $|A| = |B| = |C|$.

Beweis: Wegen $|A| = |C|$ existiert eine Bijektion $f : C \to A$. Setze

$$C_0 := C \setminus B \qquad \text{und} \qquad C_{n+1} := f(C_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und} \qquad \widetilde{C} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} C_i$$

Wir zeigen die Behauptung durch das Angeben einer Bijektion $h : C \to B$:

$$h : C \to B;\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \widetilde{C} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

h ist surjektiv: sei $y \in B$ beliebig. 1. Fall: $y \in \widetilde{C}$. Es folgt $y \in A$ und für $x := f^{-1}(y) \in \widetilde{C}$ gilt dann $y = f(x) = h(x)$. 2. Fall: $y \notin \widetilde{C}$. Dann gilt $y = h(y)$.

h ist injektiv: seien $x, y \in C, x \neq y$. 1. Fall: $x, y \in \widetilde{C}$. Es gilt $h(x) = f(x) \neq f(y) = h(y)$. 2. Fall: $x, y \notin \widetilde{C}$. Es folgt $h(x) = x \neq y = h(y)$. 3. Fall: o.B.d.A. $x \in \widetilde{C}, y \notin \widetilde{C}$. Es folgt $h(x) = f(x) \in \widetilde{C} \not\ni y = h(y)$, also $h(x) \neq h(y)$. $\square$

Bemerkung Der Beweis des obigen Lemmas benutzt die natürlichen Zahlen lediglich zur Nummerierung der C_i. Das Prinzip der vollständigen Induktion wird nicht verwendet. 1908 gab Zermelo einen Beweis, der die Menge $\mathbb{N}$ nicht benutzt.

Satz 1.3 (Satz von Cantor-Bernstein[2]) Seien A und B zwei Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$. Dann folgt $|A| = |B|$.

Beweis: Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ Injektionen und $A_1 := g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$. Die Abbildung $g \circ f : A \to A_1$ ist sowohl injektiv als auch surjektiv, also folgt $|A_1| = |A|$ und mit Lemma (1.2) weiter $|g(B)| = |A|$. Natürlich gilt $|B| = |g(B)|$, was die Behauptung zeigt. $\square$

Definition Die Kardinalzahl der Menge der natürlichen bzw. reellen Zahlen wird mit $\aleph_0$ („Aleph Null“) bzw. c (*continuum*) bezeichnet:

$$\aleph_0 := |\mathbb{N}| \qquad\qquad c := |\mathbb{R}|$$

Definition Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt *Potenzmenge* von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

Lemma 1.6 Für jede Menge A gilt $|A| \lneqq |\mathcal{P}(A)|$. Insbesondere gibt es unendlich viele transfinite Kardinalzahlen.

Beweis: Natürlich gilt $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, betrachte dazu die Injektion $f : A \to \mathcal{P}(A);\ x \mapsto \{x\}$. Wir zeigen nun $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. Angenommen es existiert eine Surjektion $f : A \to \mathcal{P}(A)$, dann gibt es zu $Z := \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A)$ ein $z \in A$ mit $f(z) = Z$. Daraus folgt der Widerspruch $z \in Z \Leftrightarrow z \in f(z) \Leftrightarrow z \notin Z$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.7 Es gibt keine größte Kardinalzahl.

Satz 1.8 (Vergleichbarkeitssatz[3]) Die Kardinalitäten zweier Mengen A und B sind stets vergleichbar, d.h. es gilt $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$.

Beweis: Im Folgenden werden Abbildungen $f : M \to N$ mit ihrem *Graph* $\{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$ identifiziert und auf diese Weise die Relation „$\subseteq$“ und die Operationen „$\cup$“ und „$\cap$“ auf Funktionen definiert. Setze

$$\mathcal{F} := \{f : A_f \to B_f \mid A_f \subseteq A, B_f \subseteq B, f \text{ bijektiv}\}$$

Die Behauptung ist gezeigt, wenn es eine Abbildung $f \in \mathcal{F}, f : A_f \to B_f$, gibt mit $(A_f = A \wedge B_f \subseteq B)$ oder $(A_f \subseteq A \wedge B_f = B)$. Angenommen die zu zeigende Behauptung ist falsch. Dann existieren zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}, f : A_f \to B_f$, Elemente $a_f \in A \setminus A_f$ und $b_f \in B \setminus B_f$. Es wird $f^* \in \mathcal{F}$ als kanonische Fortsetzung von f definiert:

$$f^* : A_f \cup \{a_f\} \to B_f \cup \{b_f\};\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A_f \\ b_f & \text{falls } x = a_f \end{cases}$$

[2] 1883 & 1897

[3] Zermelo, 1904 & 1908

Jede Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ heißt *Kette* (in $\mathcal{F}$), wenn je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h. $f, g \in \mathcal{K} \Rightarrow (f \subseteq g \vee g \subseteq f)$ gilt.

Es sei nun $f_0 \in \mathcal{F}$ fest gewählt (etwa $f_0 : \{a\} \to \{b\};\ a \mapsto b$ für $a \in A, b \in B$). Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ heißt *geschlossen*, wenn gilt:

(α) $f_0 \in \mathcal{B}$.

(β) $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f^* \in \mathcal{B}$.

(γ) Für jede Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ gilt $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f \in \mathcal{B}$.

Die Menge $\mathcal{F}$ ist ein Beispiel für eine geschlossene Menge ((α), (β) sind klar, (γ): für jede Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ ist die Abbildung $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f = \{(x, y) \mid \exists f \in \mathcal{K} : f(x) = y\}$ offenbar eine Bijektion).

Für die Menge

$$\mathcal{B}^* := \bigcap \{\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \mid \mathcal{B} \text{ geschlossen}\}$$

werden die folgenden Teilaussagen gezeigt:

(1) $\mathcal{B}^*$ ist geschlossen.

(α): es gilt $f_0 \in \mathcal{B}$ für alle geschlossenen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ nach Definition. Daraus folgt $f_0 \in \mathcal{B}^*$. (β): $f \in \mathcal{B}^* \Rightarrow f \in \mathcal{B}$ für alle geschlossenen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow f^* \in \mathcal{B}$ für alle geschlossenen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow f^* \in \mathcal{B}^*$. ($\gamma$): sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}^*$ eine Kette. Dann ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ für alle geschlossenen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, daraus folgt $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f \in \mathcal{B}$ für alle geschlossenen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Das zeigt $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f \in \mathcal{B}^*$.

(2) Für alle $f \in \mathcal{B}^*$ gilt $f_0 \subseteq f$.

Wir zeigen zunächst: die Menge $\mathcal{B}' := \{f \in \mathcal{B}^* \mid f_0 \subseteq f\} \subseteq \mathcal{B}^*$ ist geschlossen. (α) folgt aus (1). (β): $f \in \mathcal{B}' \Rightarrow (f \in \mathcal{B}^* \wedge f_0 \subseteq f) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f_0 \subseteq f \subseteq f^* \in \mathcal{B}^* \Rightarrow f^* \in \mathcal{B}'$. ($\gamma$): sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}'$ eine Kette. Dann folgt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}^*$ und $\forall f \in \mathcal{K} : f_0 \subseteq f$, also $f_0 \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{K}} f \in \mathcal{B}^*$. Das zeigt $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f \in \mathcal{B}'$. Also ist $\mathcal{B}'$ als geschlossene Menge am Schnitt von $\mathcal{B}^*$ beteiligt. Daraus folgt $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}'$, also gilt $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$ und die Behauptung ist gezeigt.

(3) Existiert ein $h \in \mathcal{B}^*$ mit $h \subseteq f \vee f \subseteq h$ für alle $f \in \mathcal{B}^*$, so hat h^* die gleiche Eigenschaft.

Wir zeigen zunächst: die Menge $\widetilde{\mathcal{B}} := \{f \in \mathcal{B}^* \mid h^* \subseteq f \vee f \subseteq h^*\} \subseteq \mathcal{B}^*$ ist geschlossen. Daraus folgt $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^*$ wie in (2), und die Behauptung ist gezeigt. (α): $f_0 \subseteq h^*$ folgt aus (2). (β): sei $f \in \widetilde{\mathcal{B}}$ beliebig. Dann gilt $f^* \in \mathcal{B}^*$ wegen (1), also $h \subseteq f^* \vee f^* \subseteq h$. In Kombination mit $h \subseteq f \vee f \subseteq h$ ergeben sich durch „Ausmultiplizieren" die beiden folgende Fälle:

1\. Fall: $h \subseteq f$. Wegen $f \in \widetilde{\mathcal{B}}$ gilt $h^* \subseteq f \vee f \subseteq h^*$. Zusammen mit $h \subseteq f$ folgt daraus $h^* \subseteq f^* \vee f = h \vee f = h^*$. In allen Fällen folgt $h^* \subseteq f^*$, also $f^* \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

2\. Fall: $f^* \subseteq h$. Es folgt $f^* \subseteq h^*$, also $f^* \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

(γ): sei $\mathcal{K} \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}$ eine Kette und $t := \bigcup_{f \in \mathcal{K}} f \in \mathcal{B}^*$.

1\. Fall: $\exists f \in \mathcal{K} : h^* \subseteq f$. Es folgt $h^* \subseteq t$, also $t \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

2\. Fall: $\forall f \in \mathcal{K} : f \subseteq h^*$. Es folgt $t \subseteq h^*$, also $t \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

(4) Die Menge $\widehat{\mathcal{B}} := \{h \in \mathcal{B}^* \mid \forall f \in \mathcal{B}^* : h \subseteq f \vee f \subseteq h\} \subseteq \mathcal{B}^*$ ist geschlossen.

(α) folgt aus (2). (β) folgt aus (3). (γ): sei $\mathcal{K} \subseteq \widehat{\mathcal{B}}$ eine Kette und $t := \bigcup_{f \in \mathcal{K}} f$. Wegen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}^*$ folgt $t \in \mathcal{B}^*$ nach (1). Sei nun $f \in \mathcal{B}^*$ beliebig.

1. Fall: $\exists h \in \mathcal{K} : f \subseteq h$. Es folgt $f \subseteq t$.

2. Fall: $\forall h \in \mathcal{K} : h \subseteq f$. Es folgt $t \subseteq f$.

Insgesamt ergibt sich $t \in \widehat{\mathcal{B}}$.

Das Ergebnis aus (4) zeigt $\widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^*$, somit ist $\mathcal{B}^*$ eine geschlossene Kette in $\mathcal{F}$ und für $t := \bigcup_{f \in \mathcal{B}^*} f$ gilt $t \in \mathcal{B}^*$. Aus $t^* \in \mathcal{B}^*$ und $t \subsetneq t^*$ ergibt sich damit ein Widerspruch zu $t^* \subseteq t$. $\square$

Folgerung 1.9 Für Mengen A, B und $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ und eine Bijektion $f_0 : A' \to B'$ gibt es eine bijektive Fortsetzung $f : A'' \to B$ oder $f : A \to B''$ mit $A' \subseteq A'' \subseteq A$ bzw. $B' \subseteq B'' \subseteq B$.

Bemerkung (1) Im obigen Beweis wählen wir für alle $f \in \mathcal{F}, f : A_f \to B_f$, gleichzeitig Elemente $a_f \in A \setminus A_f$, $b_f \in B \setminus B_f$ aus. Dies ist offenbar unter Annahme des Auswahlaxioms möglich:

> Sei I eine beliebige Indexmenge, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Dann ist ihr kartesisches Produkt ebenfalls nicht leer: $\bigtimes_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

(2) Das *Zorn'sche Lemma* zeigt für beliebige geordnete Mengen die Existenz „*maximaler Elemente*“. Es läßt sich mit obiger Methode mit dem Auswahlaxiom beweisen.

(3) Wir nehmen die folgende Äquivalenz vorweg: Auswahlaxiom $\Leftrightarrow$ Zorn'sches Lemma $\Leftrightarrow$ Wohlordnungssatz.

2 Endliche und unendliche Mengen

Definition Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\widetilde{n} := \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{0} := \emptyset = \{\}$$

Wir identifizieren $|\widetilde{n}|$ mit n.

Definition I Eine Menge A heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $|A| = |\widetilde{n}| = n$. Nicht-endliche Mengen heißen *unendlich*.

Lemma 2.1 Sind die Mengen A und B endlich, dann auch $A \cup B$. Insbesondere ist die Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen wieder endlich.

Beweis: O.B.d.A. können A und B als disjunkt angenommen werden. Zu $n = |A|$ und $m = |B|$ existieren Bijektionen $f : A \to \widetilde{n}$ und $g : B \to \widetilde{m}$. Die Abbildung h definiert als

$$h : A \cup B \to \widetilde{n+m};\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ g(x) + n & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

ist bijektiv. Das zeigt $|A \cup B| = |\widetilde{n+m}| = n + m \in \mathbb{N}$. □

Wir geben nun eine zweite Definition[4] für die Begriffe „endlich“ und „unendlich“ und werden uns im Folgenden primär auf diese beziehen:

Definition II Eine Menge A heißt *unendlich* wenn es $A' \subsetneq A$ gibt mit $|A'| = |A|$. Nicht-unendliche Mengen heißen *endlich*.

Lemma 2.2 Es sei A eine unendliche Menge. Für eine weitere Menge B gilt:

(1) $A \subseteq B \Rightarrow B$ unendlich.

(2) $|A| \leq |B| \Rightarrow B$ unendlich.

(3) Für $a \in A$ gilt $|A \setminus \{a\}| = |A|$. Insbesondere ist $A \setminus \{a\}$ unendlich.

Beweis: Da A unendlich ist, existiert eine Untermenge $A' \subsetneq A$ mit $|A'| = |A|$. Natürlich ist dann auch A' unendlich. Sei $f : A \to A'$ eine Bijektion.

(1) Für $B' := (B \setminus A) \cup A'$ ist die Abbildung

$$g : B \to B';\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ x & \text{falls } x \in B \setminus A \end{cases}$$

offenbar eine Bijektion. Es folgt $|B| = |B'|$. Wegen $B' \subsetneq B$ ist B unendlich.

(2) Sei $h : A \to B$ eine Injektion. Für $B' := (B \setminus h(A)) \cup h(A')$ ist

$$g : B \to B';\ x \mapsto \begin{cases} h \circ f \circ h^{-1}(x) & \text{falls } x \in h(A) \\ x & \text{falls } x \in B \setminus h(A) \end{cases}$$

bijektiv. Es folgt $|B| = |B'|$. Wegen $B' \subsetneq B$ ist B unendlich.

(3) Es kann o.B.d.A. $a \in A \setminus A'$ angenommen werden (betrachte sonst statt A' die Menge $(A' \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ für ein $b \in A \setminus A'$). Dann gilt $A' \subseteq A \setminus \{a\} \subseteq A$ und die Behauptung folgt mit (1.2). □

Korollar 2.3 Ist eine Menge B endlich, so auch $B \cup \{x\}$ für ein Objekt x.

Beweis: Natürlich muß nur der Fall $x \notin B$ untersucht werden. Wäre $B \cup \{x\}$ unendlich, so nach (2.2.3) auch $(B \cup \{x\}) \setminus \{x\} = B$. □

[4] Dedekind, 1887

Lemma 2.5 Für eine Menge A gilt: A ist unendlich $\Leftrightarrow |\mathbb{N}| \leq |A|$. Insbesondere ist $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ die kleinste infinite Kardinalzahl.

Beweis: „$\Rightarrow$": es sei $A' \subsetneq A$ und eine Bijektion $f : A \to A'$ gegeben. Zu $x_0 \in A \setminus A'$ setze

$$x_n := f(x_{n-1}) \; \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{N} \to A;\; n \mapsto x_n$$

Aufgrund der Bijektivität von f ist $g : \mathbb{N} \to A$ injektiv. Es folgt $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

„$\Leftarrow$": es sei $g : \mathbb{N} \to A$ injektiv. Eine Bijektion $A \to A \setminus \{g(1)\}$ ist gegeben durch

$$f : A \to A \setminus \{g(1)\};\; x \mapsto \begin{cases} g(g^{-1}(x) + 1) & \text{falls } x \in g(\mathbb{N}) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Es folgt $|A \setminus \{g(1)\}| = |A|$, also ist A unendlich. □

Lemma 2.6 Für eine Menge A gilt: A ist endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : \; |A| = n$.

Beweis: Der Fall $A = \emptyset$ bzw. $|A| = 0$ ist klar. Sei also $A \neq \emptyset$ bzw. $n \geq 1$.

„$\Rightarrow$": wähle $x_0 \in A$ beliebig. Angenommen es existiert kein $n \in \mathbb{N}$ mit $|A| = n$, dann kann für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A \setminus \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ gewählt werden. Die Abbildung $g : \mathbb{N} \to A;\; k \to x_k$ ist injektiv, also gilt $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Wegen (2.5) ist A dann unendlich, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

„$\Leftarrow$": es genügt zu zeigen: $\widetilde{n}$ ist endlich für alle n. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert ein minimales n mit unendlichem $\widetilde{n}$. Sei $A' \subsetneq \widetilde{n}$ mit $|A'| = |\widetilde{n}|$. Es kann o.B.d.A. $n \notin A'$ angenommen werden, also folgt $A' \subseteq \widetilde{n-1}$ und nach (2.2.1) die Unendlichkeit von $\widetilde{n-1}$. Das steht im Widerspruch zur Minimalität von n. □

Korollar 2.7 Die beiden Definitionen für „unendlich" sind äquivalent.

Korollar 2.8 Für eine unendliche Menge A und eine endliche Untermenge $B \subseteq A$ gilt $|A \setminus B| = |A|$.

Beweis: Folgt mit Induktion aus (2.2.3). □

3 Abzählbar unendliche Mengen

Definition Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich* falls $|A| = |\mathbb{N}|$. Im Fall $|A| \leq |\mathbb{N}|$ heißt A *abzählbar.*

Lemma 3.1 Die Menge P aller Primzahlen ist abzählbar unendlich.

Beweis: Es gilt $P \subseteq \mathbb{N}$, also ist P abzählbar. Angenommen P ist endlich, d.h. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $q := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ gilt dann $p_i \nmid q \; \forall i$, denn $p_i \nmid (m \cdot p_i + 1) \; \forall m \in \mathbb{N}$.

In der Primfaktorzerlegung von q finden sich also Primzahlen, die nicht in P enthalten sind, ein Widerspruch. $\square$

Lemma 3.2 Es gelten die folgenden Aussagen:

(1) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

(2) Sind A und B abzählbar unendlich, dann auch $A \cup B$. Insbesondere ist die Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

Beweis: (1) Eine Bijektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -2x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(2) Es seien zwei Bijektionen $g_1 : A \to \mathbb{N}$ und $g_2 : B \to \mathbb{N}$ gegeben. Eine Injektion $A \cup B \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch

$$h : A \cup B \to \mathbb{Z};\ x \mapsto \begin{cases} g_1(x) & \text{falls } x \in A \setminus B \\ -g_2(x) & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

Es folgt $|A \cup B| \leq |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. $|A \cup B| \notin \mathbb{N}$ ist klar. $\square$

Definition Für Mengen A, B sei $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $A^1 := A$ und $A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}$. Die Menge A^n kann mit der Menge der Abbildungen $\{f \mid f : \widetilde{n} \to A\}$ identifiziert werden.

Lemma 3.3 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: Wir zeigen den Satz in 3 Varianten:

(1) Durch die Abbildung $(a,b) \mapsto \frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2)+b$ ist eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben (siehe rechtsstehende Tabelle).

$a \diagdown b$	1	2	3	4
1	1	3	6	10
2	2	5	9	
3	4	8		
4	7			

(2) Durch die Abbildung $(a,b) \mapsto 2^{a-1} \cdot (2b-1)$ ist eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben.

(3) Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Mengen aller Primzahlen. Die Injektionen $\mathbb{N} \to P \times \mathbb{N};\ n \mapsto (2,n)$ und $P \times \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ (p,n) \mapsto p^n$ zeigen $|\mathbb{N}| = |P \times \mathbb{N}| \overset{(3.1)}{=\!=} |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. $\square$

Lemma 3.4 Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{N}^n$ abzählbar unendlich. Insbesondere ist A^n für jede abzählbare Menge A wieder abzählbar.

Beweis: Wir zeigen den Induktionsschritt $n \to n+1$: angenommen $\mathbb{N}^n$ ist abzählbar unendlich, d.h. es existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Sei $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eine der Bijektionen aus (3.3), dann ist auch $h : \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ (x,y) \mapsto g(f(x),y)$ bijektiv. Es folgt $|\mathbb{N}^{n+1}| = |\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. $\square$

Lemma 3.5 $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich (und damit ebenso $\mathbb{Q}^n$ für $n \in \mathbb{N}$).

Beweis: Mit Hilfe des Auswahlaxioms wählen wir für jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ein festes Vertreterpaar $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ aus mit $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$. Dann folgt $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.7 Eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Beweis: Seien $A_n, n \in \mathbb{N}$, abzählbare Mengen und $B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ihre Vereinigung. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wird eine Injektion $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ gewählt (Auswahlaxiom!). Für jedes $x \in B$ gibt es dann ein n_x mit $x \in A_{n_x}$ (Auswahlaxiom!). Die Abbildung $g : B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ x \mapsto (n_x, f_{n_x}(x))$ ist injektiv und damit $|B| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ gezeigt. $\square$

Definition Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, falls es ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ gibt so, daß r eine Nullstelle von p ist (die a_i können also o.B.d.A. aus $\mathbb{Z}$ gewählt werden). Es bezeichne $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der algebraischen Zahlen.

Lemma 3.6 $\mathbb{A}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei

$$A_m := \{r \in \mathbb{A} \mid r \text{ ist Nullstelle von } p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ mit } n \leq m \wedge a_i \in \mathbb{Z} \wedge |a_i| \leq m \ \forall i\}$$

Jedes A_m ist endlich, also ist $\mathbb{A} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ abzählbar nach (3.7). $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$ ist klar. $\square$

4 Überabzählbare Mengen

Definition Eine Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Lemma 4.1 Folgende Aussagen sind äquivalent:

(I) A ist überabzählbar.

(II) $|A| > |\mathbb{N}|$.

(III) Es gibt keine Injektion $f : A \to \mathbb{N}$.

(IV) Es gibt keine Surjektion $g : \mathbb{N} \to A$.

Beweis: (II) $\overset{(1.8)}{\Longleftrightarrow}$ (I) $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ (III) $\Longleftrightarrow$ (IV) klar. $\square$

Lemma 4.2 Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $|\mathbb{R}| = |\,]a,b[\,| = |[a,b]|$.

Beweis: Durch die Abbildungen $x \mapsto \frac{x-\frac{1}{2}}{x(x-1)}$ bzw. $x \mapsto a+(b-a)x$ sind Bijektionen $]0,1[\to \mathbb{R}$ bzw. $]0,1[\to]a,b[$ gegeben. Das zeigt $|\mathbb{R}| = |\,]a,b[\,|$. Die Gleichheit $|\,]a,b[\,| = |[a,b]|$ folgt aus $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, (2.2.1) und (2.8). $\square$

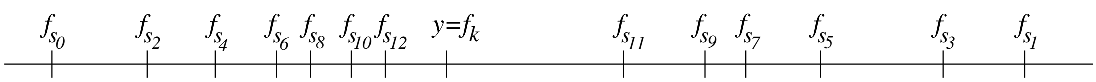
Der folgende Beweis benutzt die „Supremumseigenschaft" der reellen Zahlen: „Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum".

Bemerkung Die Menge $\mathbb{Q}$ etwa besitzt die Supremumseigenschaft nicht: die Menge $\{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$ ist beschränkt, hat aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Satz 4.3 (Cantor 1873) Es gilt $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Beweis: Angenommen es existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir definieren die monotone Folge $(s_n), n \in \mathbb{N}_0$, wie folgt: $s_0 := 1, s_1 := \min\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) > f(s_0)\}$ und

$$s_{n\geq 2} := \min\{i \in \mathbb{N} \mid (f(s_{n-2}) < f(i) < f(s_{n-1})) \vee (f(s_{n-2}) > f(i) > f(s_{n-1}))\}$$



Da die reellen Zahlen dicht liegen und f surjektiv ist, ist diese Folge wohldefiniert. Nach Konstruktion sind die Folgen $(f(s_{2n}))$ und $(f(s_{2n+1}))$ streng monoton steigend bzw. fallend. Außerdem gilt $f(s_{2n}) < f(s_{2m+1})\ \forall n,m \in \mathbb{N}_0$ und, da $(f(s_{2n}))$ nach oben von $f(s_1)$ beschränkt wird, existiert $y := \sup\{f(s_{2n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $f(k) = y$. Da y zwischen je zwei $f(s_n), f(s_{n+1})$ liegt, kommt k nach Konstruktion als Folgenglied in (s_n) vor, etwa $k = s_l$. Dann kann y aber nicht mehr zwischen $f(s_{l+1})$ und $f(s_{l+2})$ liegen, ein Widerspruch. $\square$

Für jedes natürliche $b \geq 2$ können reelle Zahlen $r \in [0,1]$ in der sog. b-adischen Darstellung geschrieben werden:

$$r = 0.r_1r_2r_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} r_i b^{-i} \qquad \text{wobei } r_i \in \{0,\ldots,b-1\}\ \forall i$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig (etwa $0.1 = 0.1\overline{0} = 0.0\overline{9}$ für $b = 10$). In der Analysis zeigt man: jedes r hat höchstens zwei Darstellungen in b-adischer Form. Liegt ein mehrdeutiger Fall vor, so ist die eine der Darstellungen endlich, d.h. fast alle r_i verschwinden. Wir sagen „r liegt in *kanonischer b-adischer Darstellung* vor" falls $r = 0$ oder die Darstellung von r nicht endlich ist. Die Abbildung von Elementen aus $[0,1]$ auf ihre kanonische b-adische Darstellung ist offenbar bijektiv.

Satz 4.4 (Cantor 1890) Es gilt $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Beweis: Es genügt $|[0,1]| > |\mathbb{N}|$ zu zeigen. Angenommen es existiert eine Surjektion $g : \mathbb{N} \to [0,1]$. Die j-te Nachkommastelle von $g(i)$ in kanonischer Dezimaldarstellung sei mit $z_{i,j}$ bezeichnet. Wir definieren

$$r_j := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_{j,j} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } z_{j,j} = 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad r = 0.r_1r_2r_3\ldots = \sum_{j=1}^{\infty} r_j 10^{-j}$$

Die Zahl $r = 0.r_1r_2r_3\ldots \in [0,1]$ liegt offenbar wieder in kanonischer Darstellung vor. Da $r_j \neq z_{j,j}\ \forall j \in \mathbb{N}$ gilt, kann es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $g(n) = r$ geben, ein Widerspruch zur Surjektivität von g. $\square$

Bemerkung Aus $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = |\mathbb{A}|$ folgt $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}| > |\mathbb{N}|$. Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ heißen *transzendent*. Hermite hat 1872 die Transzendenz von e beweisen, Lindemann zeigte im Jahre 1882 die von π.

Lemma 4.6 Es gilt $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$ für $n \in \mathbb{N}$ (insbesondere gilt $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$).

Beweis: Es genügt $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ bzw. $|[0,1] \times [0,1]| = |[0,1]|$ zu zeigen. Die Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ bilde das in kanonischer b-adischer Darstellung ($b \geq 2$ beliebig) vorliegende Paar $(x, y) = (0.x_1x_2x_3\ldots, 0.y_1y_2y_3\ldots)$ auf $z = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots \in [0,1]$ ab. Natürlich ist auch z in kanonischer Darstellung, somit ist f bijektiv und die Behauptung gezeigt. $\square$

Definition Für Mengen A, B setzen wir $({}^AB =)B^A := \{f \mid f : A \to B\}$.

Lemma 4.7 Es gilt $|\mathbb{R}^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$.

Beweis: Es genügt $|[0,1]^\mathbb{N}| = |[0,1]|$ zu zeigen. Zahlen $a_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots \in [0,1]$ in kanonischer Darstellung werden von der Abbildung $f : [0,1]^\mathbb{N} \to [0,1];\ (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto 0.a_{11}a_{12}a_{21}a_{13}a_{22}a_{31}a_{14}\ldots$ auf eine neue Zahl kanonischer Darstellung abgebildet. Da f bijektiv ist, ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Definition Für Mengen A und $B \subseteq A$ definiere

$$\mathrm{ind}_{B,A} : A \to \{0,1\};\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

und

$$\mathrm{ind}_A : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A;\ B \mapsto \mathrm{ind}_{B,A}$$

Jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist durch $\mathrm{ind}_{B,A}$ eindeutig bestimmt. Teilmengen aus $\mathbb{N}$ können auf diese Weise als Binärfolgen bzw. als reelle Zahlen kodiert werden.

Lemma 4.10 Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}^\mathbb{N}|$.

Beweis: Da alle reellen Zahlen aus $[0,1]$ eine eindeutige kanonische 2-adische Darstellung haben gilt $|\mathbb{R}| = |[0,1]| \leq |\{0,1\}^\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Zusammen mit $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^\mathbb{N}|$ zeigt das die Behauptung. $\square$

Lemma 4.12 Es gilt $|\mathbb{R}^\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Beweis: Jede Untermenge $A \subseteq \mathbb{R}$ bestimmt ein eindeutiges Element $\mathrm{ind}_{A,\mathbb{R}} \in \{0,1\}^\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$, also gilt $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^\mathbb{R}|$. Jedes $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist eindeutig durch seinen Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bestimmt, also $|\mathbb{R}^\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 4.13 Für $C := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ gilt $|C| = |\mathbb{R}|$.

Beweis: Eine stetige Funktion f wird durch $f|_\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt. Es folgt $|\mathbb{R}| \le |C| \le |\mathbb{R}^\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Bemerkung 4.14 Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen hat die Mächtigkeit $|\mathbb{R}^\mathbb{R}|$.

Bemerkung 4.15 Mit der Theorie der Ordinalzahlen zeigt man für unendliche Mengen A und B die Aussage $|A| \le |B| \Rightarrow |A \cup B| = |A \times B| = |B|$.

5 Das Kontinuumsproblem

Die Vermutung, daß es keine Menge gibt, deren Mächtigkeit zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$ liegt, formulierte Cantor 1884 in Form der sog. Kontinuums-Hypothese (CH). Das Problem, diese zu beweisen, ging als „1. Hilbertsches Problem“[5] in die Geschichte ein. (CH) ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Kontinuums-Hypothese (GCH).

(CH) Für jede Menge M gilt: $|\mathbb{N}| \le |M| \le |\mathbb{R}| \Rightarrow (|M| = |\mathbb{N}| \lor |M| = |\mathbb{R}|)$.

(GCH) Für Mengen M und A gilt: $|A| \le |M| \le |\mathcal{P}(A)| \Rightarrow (|M| = |A| \lor |M| = |\mathcal{P}(A)|)$.

Cantor führte die Folge $(\aleph_i), i \in \mathbb{N}_0$, der unmittelbar aufeinanderfolgenden Kardinalzahlen nichtendlicher Mengen (beginnend bei $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$) ein. Diese Folge ist unter Annahme von (GCH) wohldefiniert, es gilt dann nämlich $\aleph_i = |\mathcal{P}^i(\mathbb{N})|$, falls $\mathcal{P}^i(A) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^{i-1}(A))$. Die Forderungen $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$ und (CH) sind offenbar äquivalent. Definiert man

$$B_0 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N}) \qquad B_{i\ge1} := \mathcal{P}(B_{i-1}) \qquad \beth_i := |B_i| \qquad (\text{„Beth“})$$

$$C_0 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(B_0) \qquad C_{i\ge1} := \mathcal{P}(C_{i-1}) \qquad \daleth_i := |C_i| \qquad (\text{„Daleth“})$$

dann ergibt sich unter Annahme von (GCH) die folgende Ordnung von Kardinalzahlen:

$$0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \beth_0, \beth_1, \beth_2, \dots, \daleth_0, \daleth_1, \daleth_2, \dots$$

Definition Eine Aussage heißt *beweisbar* in einem Logik-Kalkül, wenn sie sich aus einer gegebenen Axiomenmenge nach vorgegebenen Regeln ableiten läßt. Ein *Modell* eines Axiomensystems ist kurz gesagt ein Beispiel, das die gegebenen Axiome erfüllt, widerspruchsfrei

[5] IMC, Paris 1900

ist und der Eigenschaft „jede Aussage, die sich in dem Axiomensystem beweisen läßt, gilt auch in dem Modell“ genügt.

Im kommenden Abschnitt werden die sog. ZFC-Axiome der Mengenlehre vorgestellt. Daß (CH) von diesen unabhängig ist, folgt aus den beiden unten angegebenen Sätzen. Ausgehend von den ZFC-Axiomen ist (CH) also „unentscheidbar“ (d.h. weder beweis- noch widerlegbar). Gödel zeigte bereits 1931, daß in jedem Axiomensystem der Prädikatenlogik zweiter Stufe unentscheidbare Aussagen existieren.

Satz 5.1 (Gödel, 1938) Falls ZFC widerspruchsfrei ist, gibt es ein Modell, das (CH) erfüllt.

Satz 5.2 (Cohen, 1963) Falls ZFC widerspruchsfrei ist, gibt es ein Modell, das $\neg$(CH) erfüllt.

6 Die ZFC-Axiome der Mengenlehre

Um die Mengenlehre axiomatisch zu fassen, benötigen wir zuerst ein Logik-Kalkül. Die Sprache der Mengenlehre enthält folgende Zeichen (man spricht auch vom *Alphabet* des Logik-Kalküls):

- Bezeichnungen für Variablen: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$
- Relationssymbolen „$\in$“ und „$=$“
- Quantoren „$\forall$“ und „$\exists$“ (alternative Schreibweise: „$\bigwedge$“ bzw. „$\bigvee$“)
- Junktoren „$\neg$“, „$\vee$“, „$\wedge$“, „$\Rightarrow$“, „$\Leftrightarrow$“
- Klammersymbolen „(“ und „)“
- weiteren Quantoren, Relationen, Funktionen und Konstanten, die sich aus obigen konstruieren lassen.

Bemerkung (1) Die Symbole „$\neg$“, „$\wedge$“ und „$\forall$“ genügen um „$\vee$“, „$\Rightarrow$“, „$\Leftrightarrow$“ und „$\exists$“ zu definieren.

(2) Die Zeichen „$\in$“, „$\neg$“, „$\wedge$“, „$\vee$“, „$\Rightarrow$“, „$\Leftrightarrow$“ binden nach Vereinbarung in abnehmender Stärke.

(3) Das angegebene Alphabet führt zur Prädikatenlogik 1. Stufe mit der Relation „$\in$“.

Definition Aus den oben genannten Symbolen können der weitere Quantor „$\exists!$“ (alternative Schreibweise: „$\exists_1$“), die Relationen „$\notin$“, „$\neq$“, „$\cup$“, „$\cap$“, „$\subseteq$“, „$\supseteq$“, „$\subsetneq$“, ... und die Konstante „$\emptyset$“ definiert werden. Für fünf der genannten geben wir eine Definition an, die übrigen erzeugt man entsprechend.

$$\exists!\, x\, \varphi(x) \Leftrightarrow \exists x \forall y (\varphi(y) \Leftrightarrow x = y)$$

$$\forall x \forall y (x \notin y \Leftrightarrow \neg x \in y)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x \cup y = z \Leftrightarrow \forall w (w \in z \Leftrightarrow w \in x \vee w \in y))$$

$$\forall x \forall y (y \subseteq x \Leftrightarrow \forall z (z \in y \Rightarrow z \in x))$$

$$\forall x (x = \emptyset \Leftrightarrow \forall z\, z \notin x)$$

Das *ZFC*[6]*-Axiomensystem* der Mengenlehre besteht aus den folgenden acht Axiomen:

(EXT) **Extensionalitätsaxiom** (axiom of extension)
(„zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten")
$\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y\big)$

(PAAR) **Paarmengenaxiom** (axiom of pairing)
(„zu Mengen x, y existiert z mit genau den Elementen x, y")
$\forall x \forall y \exists z \forall w \big(w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y)\big)$

Wir benutzen die Schreibweisen $z = \{x, y\}$ und $\{x\} = \{x, x\}$. Das Paar (x, y) läßt sich etwa als $(x, y) := \{\{x, y\}, \{x\}\}$ definieren.

(VER) **Vereinigungsaxiom** (axiom of union)
(„zu x existiert y dessen Elemente genau die Elemente der Elemente von x sind")
$\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \Leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w)\big)$

(AUS) **Aussonderungsaxiom** (axiom of specification)
(„zu einer Menge x und einer Eigenschaft (Prädikat) φ gibt es die Menge y aller Elemente von x die φ erfüllen")
$\forall x, p_1, p_2, \ldots, p_n \exists y \forall z \Big(z \in y \Leftrightarrow \big(z \in x \wedge \varphi(z, p_1, p_2, \ldots, p_n)\big)\Big)$

(POT) **Potenzmengenaxiom** (axiom of powers)
(„zu x existiert $\mathcal{P}(x)$")
$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$

(INF) **Unendlichkeitsaxiom** (axiom of infinity)
(„$\big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\big\}$ ist eine Menge")
$\exists x \big(\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$

(ERS) **Ersetzungsschema** (axiom of substitution)
(„das Bild v einer Menge u unter einer Funktion φ ist eine Menge")
$\forall p_1, p_2, \ldots, p_n \Big(\forall x \exists!\, y\, \varphi(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_n) \Rightarrow$
$\quad \forall u \exists v \forall y \big(y \in v \Leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \varphi(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_n))\big)\Big)$

(AC) **Auswahlaxiom** (axiom of choice)
(„Ist x eine Menge nichtleerer disjunkter Mengen z, so existiert eine Menge y, die aus jeder Menge z von x genau ein Element enthält")
$\forall x \Big(\big(\emptyset \notin x \wedge \forall u \forall v (u \in x \wedge v \in x \wedge u \neq v) \Rightarrow u \cap v = \emptyset\big) \Rightarrow \exists y \forall z (z \in x \Rightarrow \exists!\, w : w \in z \cap y)\Big)$

[6] nach Zermelo, Fraenkel. Das „C" steht für „mit Auswahlaxiom".

Bemerkung (1) Die Menge aus (INF) kann auf natürliche Weise mit $\mathbb{N}$ identifiziert werden.

(2) (AUS), (ERS) müssen für jedes φ gelten, also sind es genaugenommen unendlich viele Axiome der 1. Stufe, also ein Axiom 2. Stufe. Nur in einer Logik 2. Stufe dürfen Eigenschaften (Funktionen) unter Quantoren stehen. Die Konstanten $p_1, \dots, p_n$ stellen die konstanten Parameter dar, falls die Funktion φ eine höhere Stelligkeit als 2 hat.

Lemma 6.1 Aus den Axiomen (EXT), (PAAR), (VER) und (AUS) folgt:

(1) Jede Menge x hat eine Teilmenge y, die nicht Element von x ist.

(2) Cantor's „Allmenge" ist keine Menge, d.h. es gibt keine Menge x mit $\forall y : y \in x$.

(3) Es gibt keine Menge x aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Beweis: (1) Für eine Menge x ist $y := \{z \in x \mid z \notin z\}$ wegen (AUS) ebenfalls eine Menge. Natürlich gilt $y \subseteq x$. Im Fall $y \in x$ folgt der Widerspruch $y \in y \Leftrightarrow y \notin y$. Also gilt $y \notin x$ und die Behauptung ist gezeigt.

(2) Nach (1) existiert $y \subseteq x$ mit $y \notin x$. Das zeigt die Behauptung.

(3) Aus der Existenz von x folgt für $y = \{z \in x \mid z \notin z\}$ natürlich $x = y$. Aus $y \in x$ folgt $y \notin y$ und aus $y \notin y$ stets $y \in x$, im Widerspruch zu $y = x$. □

Bemerkung (1) Nach dem 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatz läßt sich innerhalb von ZFC die Widerspruchsfreiheit von ZFC nicht beweisen. Bisher wurden jedoch keine Widersprüche entdeckt.

(2) Auf eine Definition von „Element von" und „Urmenge" wird bewusst verzichtet. Ein Axiom ist einfach eine Zeichenkette, die nach vorgegebenen Regeln aufgebaut ist. Durch nach festen Regeln vorgenommenes Umformen gewinnt man Sätze. Jeder darf von Elementen und Mengen seine eigenen Vorstellungen haben: alles, was die Axiome erfüllt, ist erlaubt („formalistischer Standpunkt"). Mögliche Vorstellungen könnten sein:

- **Zermelo**: in einem Bereich von Objekten, genannt „Dinge", bilden die Mengen einen Teil. „$\in$" und „$=$" sind Grundbeziehungen dieses Bereichs.
- **Platoniker**: Axiome behandeln einen ausgezeichneten Bereich des mengentheoretischen Universums, das für sich (unabhängig von uns) existiert. Axiome sind darin richtige Aussagen, die möglicherweise nur in einem Teilbereich des Universums gelten.
- **Klassen und Mengen** (Idee): Klassen sind unbeschränkte Teile des Mengenuniversums, und Mengen, wenn sie gewünschte Eigenschaften haben (etwa ZFC erfüllen). „Echte Klassen sind zu groß um Mengen zu sein". $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ ist die zur Eigenschaft φ gehörige Klasse, $\{x \mid x = x\}$ ist das Mengenuniversum. Klassen lassen sich in Ausdrücken durch Formeln ersetzen.

(3) Es gibt weitere Axiomensysteme für Mengen, etwa NBG (v. Neumann, Bernays, Gödel) oder MK (Morse, Kelley). Beide lassen Klassen zu. Aussagen für Mengen sind in NBG genau dann beweisbar, wenn sie in ZFC gelten.

7 Ordinalzahlen

Definition Zwei total geordnete Mengen $(A, \leq_1)$ und $(B, \leq_2)$ heißen *(ordnungs-)ähnlich* (in Zeichen $A \simeq B$), wenn es eine Bijektion $\varphi : A \to B$ gibt, die ordnungserhaltend abbildet, d.h. $x <_1 y \Leftrightarrow \varphi(x) <_2 \varphi(y)$. Die Abbildung φ wird als *Ordnungsisomorphismus* (*O-Isomorphismus*) bezeichnet.

Lemma 7.1 (1) Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Jede endliche, total geordnete Menge $(A, \leq_1)$ ist ähnlich zu $(\widetilde{|A|}, \leq_2)$, wobei $\leq_2$ die natürliche Ordnung der natürlichen Zahlen ist. Insbesondere sind endliche Mengen gleicher Mächtigkeit immer zueinander ähnlich.

Beweis: (1) Reflexivität: ein O-Isomorphismus ist durch die Identität gegeben. Symmetrie: mit $\varphi : A \to B$ ist auch $\varphi^{-1} : B \to A$ o-isomorph. Transitivität: sind $\varphi : A \to B$ und $\psi : B \to C$ zwei O-Isomorphismen, dann auch $\psi \circ \varphi : A \to C$.

(2) Vollständige Induktion nach $|A|$: für $|A| \in \{0, 1\}$ ist nichts zu zeigen. Sei also $|A| \geq 2$. Da A total geordnet ist, existiert (eindeutig) ein maximales Element $a \in A$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $A \setminus \{a\} \simeq \widetilde{|A| - 1}$. Ein entsprechender O-Isomorphismus wird durch Erweiterung um $a \mapsto |A|$ zum gesuchten O-Isomorphismus $A \to \widetilde{|A|}$. $\square$

Definition Die Äquivalenzklassen bzgl. „$\simeq$" heißen *Ordinalzahlen* (*Ordnungszahlen*). Die zu einer Menge $(A, \leq)$ gehörende Ordinalzahl wird mit $\mathrm{ord}(A) = \mathrm{ord}(A, \leq)$ bezeichnet. Für endliche Mengen identifizieren wir die Ordinalzahl mit der Mächtigkeit: $\mathrm{ord}(\widetilde{n}) = n$. Die Ordnungszahl der auf natürliche Weise angeordneten Menge $\mathbb{N}$ wird mit $\omega = \mathrm{ord}(\mathbb{N}) = \mathrm{ord}(\mathbb{N}, \leq)$ bezeichnet.

Definition Für total geordnete disjunkte Mengen $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ definieren wir die totale Ordnung $\leq_3$ auf $A \cup B$ wie folgt:

$$\leq_3 := \leq_1 \cup (A \times B) \cup \leq_2$$

und führen auf diese Weise eine additive Schreibweise für Ordinalzahlen ein:

$$\mathrm{ord}(A \cup B, \leq_3) = \mathrm{ord}(A, \leq_1) + \mathrm{ord}(B, \leq_2)$$

Beispiel Im folgenden sind einige total geordnete Mengen und die zugehörigen Ordinalzahlen angegeben. Bemerke, daß die Beispiele 1 und 2 klar machen, daß die oben eingeführte Addition nicht kommutativ ist. Beispiele 7 und 8 legen nahe, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Menge M mit $\mathrm{ord}(M) = \omega^n$ existiert.

Nr.	geordnete Menge	Ordinalzahl
1	$1, 2, 3, \ldots, n, \underbrace{n+1, n+2, \ldots}_{\omega}$	$\omega = n + \omega$
2	$\underbrace{n+1, n+2, \ldots}_{\omega}, 1, 2, \ldots, n$	$\omega + n$
3	$\ldots, 4, 3, 2, 1$	nicht ω
4	$\underbrace{1, 3, 5, 7, \ldots}_{\omega}, \underbrace{2, 4, 6, 8, \ldots}_{\omega}$	$\omega + \omega = \omega \cdot 2$
5	$\underbrace{2, 4, 6, 8, \ldots}_{\omega}, \underbrace{3, 9, 15, 21, \ldots}_{\omega}, \underbrace{5, 25, 35, 55, \ldots}_{\omega}, \underbrace{7, 49, 77, 91, \ldots}_{\omega}, \ldots$	$\omega \cdot \omega = \omega^2$
6	$\underbrace{4, 6, 8, \ldots}_{\omega}, \underbrace{9, 15, 21, \ldots}_{\omega}, \underbrace{25, 35, 55, \ldots}_{\omega}, \underbrace{49, 77, 91, \ldots}_{\omega}, \underbrace{2, 3, 5, 7, \ldots}_{\omega}$	$\omega^2 + \omega$
7	$M_1 = \{n - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ mit der natürlichen Ordnung von $\mathbb{Q}$ $\underbrace{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots}_{\omega}, \underbrace{1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \ldots}_{\omega}, 2, \ldots$	ω^2
8	$M_2 = M_1 \cup \{n - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} \mid m, n, k \in \mathbb{N}, m \geq 2, k > m(m-1)\}$ $0, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2} \ldots, \frac{2}{3} - \frac{1}{7}, \frac{2}{3} - \frac{1}{8}, \ldots, \frac{2}{3}, \ldots$	$(\omega \cdot \omega) \cdot \omega = \omega^3$

Definition Eine total geordnete Menge $(A, \leq)$ heißt *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge M ein kleinstes Element $m \in M$ hat (d.h. $\forall x \in M : m \leq x$). Mengen der Form $A_a = \{x \in A \mid x < a\}, a \in A$, heißen *Abschnitt* von A. Ist $(B, \leq)$ eine weitere total geordnete Menge, so schreiben wir $\mathrm{ord}(A) < \mathrm{ord}(B)$, wenn $(A, \leq)$ o-isomorph zu einem Abschnitt von $(B, \leq)$ ist.

Beispiel $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ sind nicht wohlgeordnet. Es gilt $\omega \leq \mathrm{ord}(\{2, 3, 4, \ldots, 1\})$.

Im folgenden betrachten wir nur wohlgeordnete Mengen $(A, \leq)$, $(B, \leq)$.

Lemma 7.2 (1) Ist $\varphi : A \to A$ eine (nicht notwendigerweise bijektive) ordnungserhaltende Abbildung (d.h. $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$), so gilt $\varphi(x) \geq x \; \forall x \in A$.

(2) $\mathrm{id} : A \to A$ ist der einzige O-Automorphismus von A.

(3) Sind $\varphi : A \to B$ und $\psi : A \to B$ zwei O-Isomorphismen, so folgt $\varphi = \psi$.

Beweis: (1) Angenommen $X := \{x \in A \mid x > \varphi(x)\} \neq \emptyset$. Da $(A, \leq)$ wohlgeordnet ist, hat X ein kleinstes Element $m \in X$. Natürlich gilt $m > \varphi(m)$ und, da φ ordnungserhaltend ist, weiter $\varphi(m) > \varphi(\varphi(m))$. Daraus folgt $\varphi(m) \in X$, wegen $m > \varphi(m)$ ein Widerspruch zur Minimalität von m.

(2) Sei $\varphi : A \to A$ ein O-Automorphismus. Dann ist auch φ^{-1} o-automorph. Aus (1) folgt $\varphi(x) \geq x$ und $\varphi^{-1}(x) \geq x \; \forall x$. Zusammen ergibt sich $\varphi(x) = x \; \forall x$, also $\varphi = \mathrm{id}$.

(3) $\psi^{-1} \circ \varphi : A \to A$ ist ein O-Automorphismus von A, also gilt $\psi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$, d.h. $\varphi = \psi$. □

Lemma 7.3 Kein Abschnitt $(A_a, \leq)$ von $(A, \leq)$ ist o-isomorph zu $(A, \leq)$.

Beweis: Angenommen $\varphi : A \to A_a$ ist ein O-Isomorphismus. Da φ ordnungserhaltend $A \to A$ abbildet, folgt $\varphi(a) \geq a$ mit (7.2.1), also $\varphi(a) \notin A_a$, ein Widerspruch. □

Lemma 7.4 Die Ordinalzahlen wohlgeordneter Mengen sind total geordnet, d.h. für $\alpha = \mathrm{ord}(A, \leq)$ und $\beta = \mathrm{ord}(B, \leq)$ gilt stets $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\alpha > \beta$.

Beweis: Für die Relation $f := \{(a, b) \in A \times B \mid A_a \simeq B_b\}$ werden folgende Teilaussagen gezeigt:

(1) f ist eine Bijektion $A' \to B'$ für Mengen $A' \subseteq A, B' \subseteq B$.

Seien $(a, b_1), (a, b_2) \in f$ gegeben, dann gilt $B_{b_1} \simeq B_{b_2}$ aufgrund der Transitivität von „$\simeq$". Wegen (7.3) kann weder $b_1 < b_2$ noch $b_2 < b_1$ gelten. Also gilt $b_1 = b_2$ und f ist eine Funktion. Die Injektivität $(a_1, b), (a_2, b) \in f \Rightarrow a_1 = a_2$ wird genauso gezeigt.

(2) Die Funktion f ist ordnungserhaltend.

Sei $(x, y), (x', y') \in f$ mit $x < x'$ gegeben. Sei φ ein O-Automorphismus $A_{x'} \to A_{y'}$. Dann ist für $y'' = \varphi(x)$ durch $\varphi|_{A_x}$ ein O-Automorphismus $A_x \to A_{y''}$ gegeben. Wie in (1) folgt $y'' = y$. Da φ ordnungserhaltend ist, ist $y < y'$ gezeigt.

(3) $A = A'$ oder A' ist Abschnitt von A. Entsprechendes gilt für B und B'.

Es genügt für $x' \in A'$ und $x \in A$ die Aussage $x < x' \Rightarrow x \in A'$ zu zeigen. Sei $y' = f(x')$ und $\varphi : A_{x'} \to B_{y'}$ ein entsprechender O-Isomorphismus. Für $x < x'$ und $y = \varphi(x)$ ist dann $\varphi|_{A_x}$ ein O-Isomorphismus $A_x \to B_y$. Daraus folgt $(x, y) \in f$, also $x \in A'$.

(4) Es gilt $A' = A$ oder $B' = B$.

Falls beide Mengen $A \setminus A'$ und $B \setminus B'$ nichtleer sind, existieren kleinste Elemente $m \in A \setminus A'$ und $n \in B \setminus B'$. Mit (3) folgt $A' = A_m$ und $B' = B_n$, also ist $f : A_m \to B_n$ wegen (1) und (2) ein O-Isomorphismus. Also $(m, n) \in f$, ein Widerspruch. Die Behauptung folgt.

Im Fall $A' = A$ folgt $\mathrm{ord}(A) \leq \mathrm{ord}(B)$, im Fall $B' = B$ folgt $\mathrm{ord}(B) \leq \mathrm{ord}(A)$. Insgesamt zeigt das die Behauptung. □

Satz 7.6 (Wohlordnungssatz[7]) Jede Menge M läßt sich wohlordnen.

Beweis: Wir ordnen (mit dem Auswahlaxiom) jeder nichtleeren Teilmenge $A \subseteq M$ ein Element aus A zu:

$$\gamma : \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M;\ A \mapsto a \in A$$

Eine wohlgeordnete Menge $(A, \leq), A \subseteq M$, heißt γ-Menge, wenn $\gamma(M \setminus A_x) = x\ \forall x \in A$.

(1) Für verschiedene γ-Mengen $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ ist die eine Abschnitt der anderen.

Nach (7.4) kann o.B.d.A. $A \simeq B'$ für $B' = B$ oder einen Abschnitt B' von B angenommen werden. Sei etwa $\varphi : A \to B'$ ein entsprechender O-Isomorphismus und $A' := \{x \in A \mid \varphi(x) \neq x\}$ die Menge der nicht-Fixpunkte. Im Fall $A' \neq \emptyset$ sei m kleinstes Element von A'. Nach Definition von m gilt $A_m = B_{\varphi(m)}$, also $m = \gamma(M \setminus A_m) = \gamma(M \setminus B_{\varphi(m)}) = \varphi(m)$, ein Widerspruch zu $m \in A'$. Es folgt $A' = \emptyset$, also $\varphi = \mathrm{id}$. Das zeigt die Behauptung.

[7] Zermelo, 1904

(2) Aus (1) folgt: die Menge $C := \bigcup\{A \mid A \text{ ist } \gamma\text{-Menge}\} \subseteq M$ ist mit der von den γ-Mengen übertragenen Ordnung „$\leq$“ wohlgeordnet.

(3) $(C, \leq)$ ist γ-Menge.

Für $x \in C$ gibt es eine γ-Menge A mit $x \in A$ und $x = \gamma(M \setminus A_x)$. Aus $C_x = A_x$ folgt $x = \gamma(M \setminus C_x)$. Also ist C eine γ-Menge.

(4) Es gilt $M = C$.

Falls $M \setminus C \neq \emptyset$ sei $z = \gamma(M \setminus C) \in M \setminus C$. Dann ist $D = C \cup \{z\}$ mit dem größten Element z wohlgeordnet. Es gilt $D_z = C$ und $z = \gamma(M \setminus D_z)$, also ist D als γ-Menge an der Konstruktion $C := \bigcup\{A \mid A \text{ ist } \gamma\text{-Menge}\}$ beteiligt. Es folgt $z \in C$ im Widerspruch zu $z \in M \setminus C$. Also $M = C$.

Aus (2) und (4) folgt die Behauptung. □

Definition Für eine wohlgeordnete Menge $(A, \leq)$ sei $\widetilde{A} := \{\mathrm{ord}(A_a) \mid a \in A\}$. Für Ordinalzahlen α, β heißt β Nachfolger von α, wenn $\beta = \alpha + 1$. Ist $\beta \neq \mathrm{ord}(\emptyset)$ kein Nachfolger, so heißt β *Limeszahl*.

Bemerkung 7.8 Es gelten folgende Aussagen:

(1) Die Ordinalzahlen bilden keine Menge.

(2) Die Ordinalzahlen wohlgeordneter Mengen sind wohlgeordnet.

(3) Jede Ordinalzahl α hat einen direkten Nachfolger $\alpha + 1$.

(4) Es gilt $\mathrm{ord}(\widetilde{A}) = \mathrm{ord}(A)$ und $\mathrm{ord}(\widetilde{A} \cup \{\mathrm{ord}(A)\}) = \mathrm{ord}(A) + 1$.

(5) Es gilt: $\mathrm{ord}(A)$ ist Limeszahl $\Leftrightarrow$ A hat kein Maximum $\Leftrightarrow$ $A = \bigcup\{A_x \mid x \in A\}$.